



TITLE:

# ホモロジー平面について

AUTHOR(S):

杉江, 徹

---

CITATION:

杉江, 徹. ホモロジー平面について. 代数幾何学シンポジウム記録  
1988, 1988: 53-67

ISSUE DATE:

1988

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/212685>

RIGHT:

## ホモロジー平面について

京大理 杉江 徹

### §1. 序

$X$  を複素数体  $\mathbb{C}$  上で定義された非特異代数曲面とする。  
 $X$  の一次元以上のホモロジー群  $H_i(X, \mathbb{Z})$  が  $i \geq 1$  に対して自明であるとき、 $X$  をホモロジー平面という。

Whitehead の定理により、特に  $X$  がホモロジー平面でかつ  $\pi_1(X)$  が自明であることと、 $X$  が可縮であることは同値である。

$X$  がホモロジー平面であるとき、 $X$  は次の性質を持つ。

(1)  $X$  はアフィン曲面である。そこで  $X$  を  $\text{Spec } A$ 、  
 $A$  はアフィン環と表わす。

(2)  $A^* = \mathbb{C}^*$ 、但し  $A^*$  は  $A$  の可逆元全体。

(3)  $\text{Pic}(X) = (0)$ 。

上の (1), (2), (3) より  $X$  の有数の小平次元  $K(X)$  が  $-\infty$  のとき  $\mathbb{C}^2$  の特徴づけにより  $X$  は  $\mathbb{C}^2$  に同型になる。  
 $\mathbb{C}^2$  と異なるホモロジー平面の例は、最初 Ramanujam に

よって 1971年に 与えられた[7]。彼の例は 可縮な 有数の小平次元が2の曲面である。その後しばらくホモロジー平面についての研究は現れなかったが、1985年頃 Gurjar と宮西は小平次元が 0, 1 のホモロジー平面  $X$  について 詳しく調べ 次の事を示した。

Case  $\overline{K}(X)=0$  有数の小平次元が 0 のホモロジー平面は存在しない。

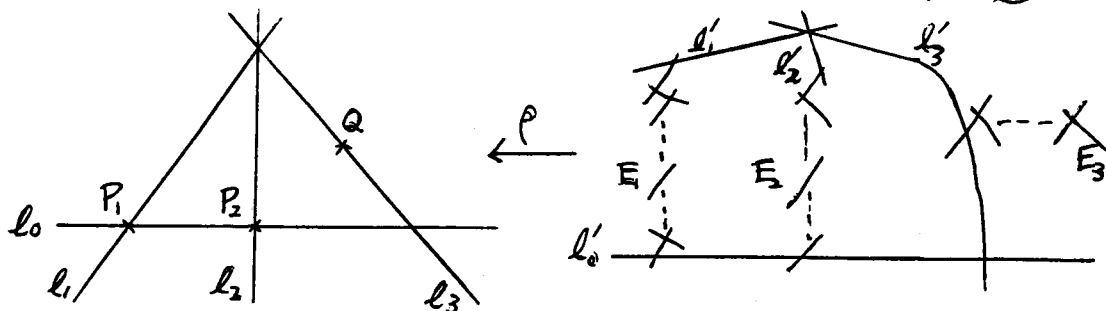
Case  $\overline{K}(X)=1$  有数の小平次元が 1 のホモロジー平面は、すべて次の方法によって得られる。

㊦) 2組の整数の対  $(m_i, \delta_i)$ ,  $(m_2, \delta_2)$  を次の条件をみたすように選ぶ。

$$m_i > \delta_i > 0, \quad i=1, 2$$

$$m_1 m_2 - m_1 \delta_2 - m_2 \delta_1 = \pm 1$$

㊦)  $\mathbb{P}^2$  上に 4本の直線  $l_0, l_1, l_2, l_3$  を  $l_1, l_2, l_3$  の3本が一点で交わり、 $l_0$  はその点を通らないように選ぶ。



い)  $l$  と  $l_1$  の交点を  $P_1$ ,  $l$  と  $l_2$  の交点を  $P_2$  とし, さらに  $l_3$  上に他の直線上にない点  $Q$  を任意に選んで  $P_1, P_2, Q$  から始めて  $P_1, P_2, Q$  の infinitely near point まで blowing up を繰り返す。但し, この blowing up の列は新しく得られた曲面を  $V$ ,  $V$  から  $\mathbb{P}^2$  への blowing up の合成写像を  $\rho$  とするとき, 次の条件をみたすように選ぶ。

- $\rho^{-1}(P_1), \rho^{-1}(P_2), \rho^{-1}(Q)$  は linear chain で, 第一種例外曲線を丁度一本ずつ含む。これをそれぞれ  $E_1, E_2, E_3$  とするとき,

$$\rho^*(l_1) = m_1 E_1 + \dots, \quad \rho^*(l_2) = m_2 E_2 + \dots$$

$$\rho^*(l) = \delta_1 E_1 + \delta_2 E_2 + \dots$$

が成り立ち,  $E_3$  は  $\rho^{-1}(Q)$  の end component である。

以上の条件により,  $P_1, P_2$  およびそれぞれの infinitely near point を中心とする blowing up の列は一意的に定まり,  $\rho$  には  $Q$  の infinitely near point を中心とする blowing up の列の任意性だけが残る。

$$(二) \quad D := \text{Supp}(P^{-1}(l_0 \cup l_1 \cup l_2 \cup l_3) - (E_1 \cup E_2 \cup E_3))$$

$$X := V - D$$

とおくと  $X$  はホモロジー平面になり、任意の  $\bar{K} = 1$  のホモロジー平面は、この方法で得られる。

### §.2. $\bar{K}(X) = 2$ のホモロジー平面

対数的小平次元が  $-\infty, 0, 1$  のホモロジー平面が決定されたので  $\bar{K}(X) = 2$  のホモロジー平面の構造が課題として残る。

$X$  をホモロジー平面とし、 $X$  を非特異射影曲面  $V$  の中に埋め込んでおく。但し、 $D := V - X$  とするとき、 $D$  は極小単純正規交叉型 (minimal simple normal crossing 以下、MSNC と略す) とする。ホモロジー完全系列を使って、容易に次の事がわかる。

- (1)  $P_g(V) = 0$
- (2)  $D$  の各既約成分は、 $P^1$  に同型。
- (3)  $D$  の相対グラフ  $\Gamma(D)$  は tree.
- (4)  $D$  の成分は  $\text{Pic}(V)$  を自由に生成する。

さて、西井-宮岡氏によって、 $K_V + D$  が Zariski 分解を持つとき、宮岡の不等式が成り立つことが証明されている。

いま我々は、その不等式の特殊な形が必要になる。

$V$  の一つの相対的極小モデルを  $V'$ ,  $V$  から  $V''$  への写像を  $\pi$  とし,  $\pi$  を次のように分解する。

$$\begin{array}{ccccc} \pi: V & \xrightarrow{\pi_1} & V' & \xrightarrow{\pi_2} & V'' \\ D & & D' = \pi_1(D) & & D'' = \pi(D). \end{array}$$

但し、 $\pi_2$  は、 $D'$  の各既約成分の特異点の最短の特異点解消になっているとする。さらに、

$$\pi = \varphi_m \circ \varphi_{m-1} \circ \cdots \circ \varphi_1.$$

$$\psi_j = \varphi_j \circ \varphi_{j-1} \cdots \circ \varphi_1.$$

各  $\varphi_i$  は *blowing up*.

$\mathcal{E}_1: \pi_1$  の例外集合、 $\mathcal{E}_1$  の既約成分の個数  $= n_1$ .

$\mathcal{E}_2: \pi_2$  " " " "  $= n_2$ .

$\mathcal{E}: \pi$

とおく。

$\mathcal{E}_1$  の各既約成分  $L_i$  に対して、 $\psi_{k-1}(L_i)$  が  $\psi_k$  の例外曲線になっている時、

$$\beta(L_i) = (\psi_{k-1}(D) / \psi_{k-1}(L_i) \cdot \psi_{k-1}(L_i))$$

とおく。

以下、次の様に定義する。

$$R_3 = \cup \{L_i \mid \beta(L_i) = 3\}$$

$$R_4 := \cup \{L_i \mid \beta(L_i) \geq 4\}.$$

$$S := \varepsilon_2 \cap \pi_1(D).$$

$$e_1 := n_1 - b_2(\varepsilon_1 \cap D)$$

$$\sigma := n_2 - \sum_{E' \in S} (E'^2 + 2).$$

$$r_i = b_2(R_i).$$

$$\beta_i = b_i(V), \quad b_i = b_i(D).$$

但し、 $b_i(W)$  は、 $W$  の  $i$  次の *betti* 数を表す。

$$D'' = \cup D''_t, \quad D''_t \text{ は } D'' \text{ の既約成分.}$$

$P_{t,i}$   $D''_t$  の *infinitely near point* を含む特異点。

$m_{t,i}$   $P_{t,i}$  における、 $D''_t$  の *multiplicity* .

$$\tau = \sum m_{t,i} - 2n_2$$

$$\lambda = \sum D''_t \cdot K_{V''}$$

以上の記号の下で、次の命題が成り立つ。

命題 1.  $V$  を  $P_g = q_t = 0$  の非特異射影曲面,  $D$  を  $V$  上の MSNC の因子とする。  $D$  の各既約成分は  $\mathbb{P}^1$  に同型で、  $D$  の各連結成分は、単連結で、一点に *blow down* できないとする (既ち、  $D$  の各連結成分の  $V'$  上の像は一次元であるとする)。 かつ、ある正数  $m$  が存在して、  $m(K_V + D)$  が *effective* であるとする。 次の不等式が成り立つ。

$$3(h_2 - \beta_2) + h_0 + \lambda + c + e + e_1 + r_3 + 2r_4 \leq \beta_2'' - 5$$

上の不等式で、 $\lambda$  以外の項は、非負であり、 $V$  が有理曲面でなければ  $\lambda$  も、0 以上である。

上の不等式を使って、Gurjar-Shastri は、次の定理を証明した。

定理 1 [3].  $X$  がホモロジー平面であれば、 $V$  は有理曲面である。

従って、ホモロジー平面はすべて、次のようにして得られることがわかる。

### (★). ホモロジー平面の構成法

(1)  $\mathbb{P}^2$  上に、 $r+1$  個の有理曲線  $H_1, H_2, \dots, H_{r+1}$  を取り、

$$H = H_1 \cup \dots \cup H_{r+1} \text{ とおく。}$$

(2)  $\mathbb{P}^2$  から出発して *blowing up* を続け、合成を  $\pi: V \rightarrow \mathbb{P}^2$  としたとき、 $\pi^{-1}(H)$  が MSNC であるようにする。

$$(3) D = \text{Supp}(\pi^{-1}(H) - (E_1 \cup \dots \cup E_r))$$

但し、 $E_1, \dots, E_r$  は、 $\pi$  の例外曲線。



上の (1) ~ (3) を

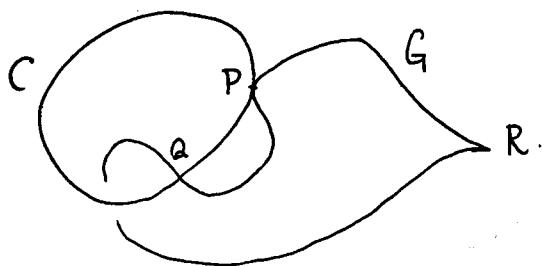
(a).  $D$  の相対グラフが *tree* になり.

(b).  $X = V - D$  が ホモロジー平面 になるように選ぶ

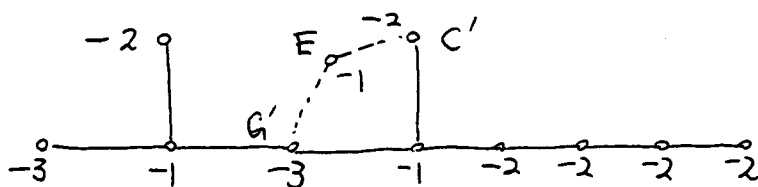
以上の方法で原理的には. 全てのホモロジー平面が得られる。

例 1. Ramanujam [7].

$\mathbb{P}^2$  上の 2 次曲線  $C$  と. 尖点を持つ 3 次曲線  $G$  を. 一点で 横断的に交わり. もう一点で 5 重に接するように. 選ぶ。



$P$  を 5 回.  $R$  を 3 回. *blowing up* することによって.  $MSNC$  な因子を得る。さらに.  $Q$  を 一回 *blowing-up* し. これらすべての合成を  $\pi: V \rightarrow \mathbb{P}^2$  とするとき.  $\pi^*(C \cup G)$  の 相対グラフは. 次のページのようになる。ここで  $E$  は点  $Q$  の *blowing-up* によって得られる.  $(-1)$  curve (第一例外曲線を 以後こう呼ぶ) である。



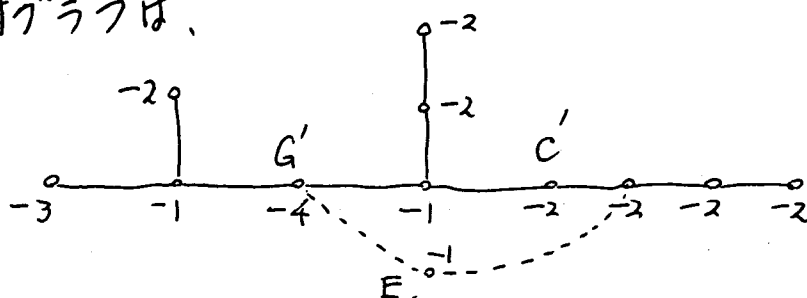
$X = V - \text{Supp}(\pi^{-1}(C \cup G) - E)$  が Ramanujan の与えた可縮曲面の例である。

例2. Gurjar-Miyazaki [2]

$C, G$  は例1と同じで  $C \cdot G = 3P + 3Q$  とする。



相対グラフは、



$X$  は、例1と同様に定義する。但し、この構成法は、元々の構成法とは異なるが得られる曲面は、同一である。

一年ほど前までは、 $\pi(X) = 2$  のホモロジー平面は、以上の2例しか知られていなかった。我々は、 $r=1$  の場合に

次の様な結果を得た。

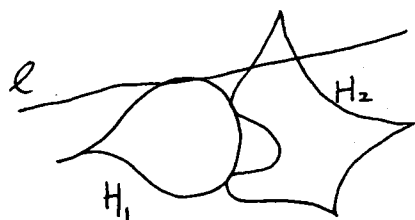
定理 2. [8].  $H_1, H_2$  を  $\mathbb{P}^2$  上の曲線で、それぞれ、 $\mathbb{P}^2$  に、位相同型であるとする。

$$m = \deg H_1, \quad n = \deg H_2, \quad m \leq n$$

$H_1 \cap H_2 = \{P, Q\}$ ,  $P, Q$  は  $H_i$  の非特異点、とする。(\*) の方法で  $H_1, H_2$  より、ホモロジー平面  $X$  が構成できたとすれば、 $m \leq 2$ 。

注意 (1). 一般には、命題 1 の不等式および コンピューターを使った計算による。次のケースだけ、わからなかったが、酒井氏に教えていただいた。

・  $(m, n) = (3, 4)$ .  $H_2$  が 3 個の尖点を持つとき。



$H_1 \cup H_2$  に 一点で接する直線  $l$  をつけ加えて、 $l \cup H_1 \cup H_2$

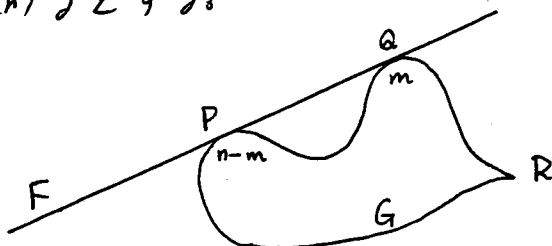
で分岐する  $\mathbb{P}^2$  の 2 重被覆  $S$  を考える。  $S$  は 有理 2 重点を持ち、その非特異モデル  $\tilde{S}$  として、一般型の曲面を得るが、 $\tilde{S}$  は、一般型の曲面の Matsuoaka-Sakai の不等式をみたさない。従って、上の様な曲線  $H_1, H_2$  は存在しない。

注意(2) .  $(m, n) = (2, n)$  のケース.

$H_2$  が 一個の尖点を持つ時,  $n \geq 7$  なら, ホモロジー平面を与えるような, 曲線の時,  $H_1, H_2$  は存在しない.

$(m, n) = (1, n)$  のケース

$F$  を  $P^2$  の直線,  $G$  を  $P^2$  上の次数  $n$  で, 重複度  $n-1$  の尖点を一個持つ, 有理曲線とし,  $F$  と  $G$  は,  $G$  の尖点以外の 2 点で, 交わるとする.



まず, SNC な因子を得るために,  $P$  を  $n-m$  回,  $Q$  を  $m$  回,  $R$  を  $n$  回, blowing-up する。さらに,  $Q$  の,

*infinitely near point* で,  $G$  上の点を  $r+1$  回 blowing-up し, 最後に, 得られた,  $(-1)$  curve を  $E$ , blowing-up の右成を  $\sigma: V \longrightarrow P^2$  とする。

$$X := V - \text{Supp}(\sigma^{-1}(F+G) - E)$$

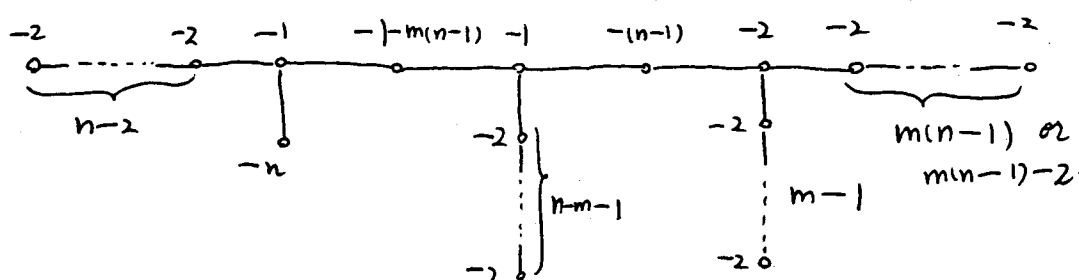
とおき,  $n \geq 3$ ,  $[\frac{n}{2}] \geq m \geq 1$  と仮定する。

以上の記号の下で, 次の定理を得る。

定理 3.15,

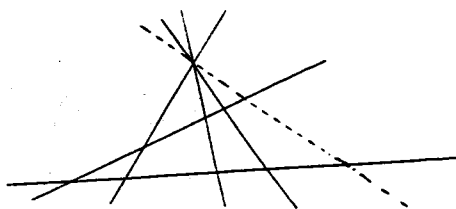
$X$  が ホモロジー平面である  $\Leftrightarrow Y = m(n-1)$  の  $m(n-1)-2$ .  
 特に,  $m=1$ ,  $Y=n-1$  なら,  $X$  は可縮であり, また,  $m=1$ ,  
 $n=3$  の時,  $X$  は Ramanujam の例に同型である.

$V$  上での  $\text{Supp}(\sigma^{-1}(F+G)-E)$  の相対グラフは次の様になる.

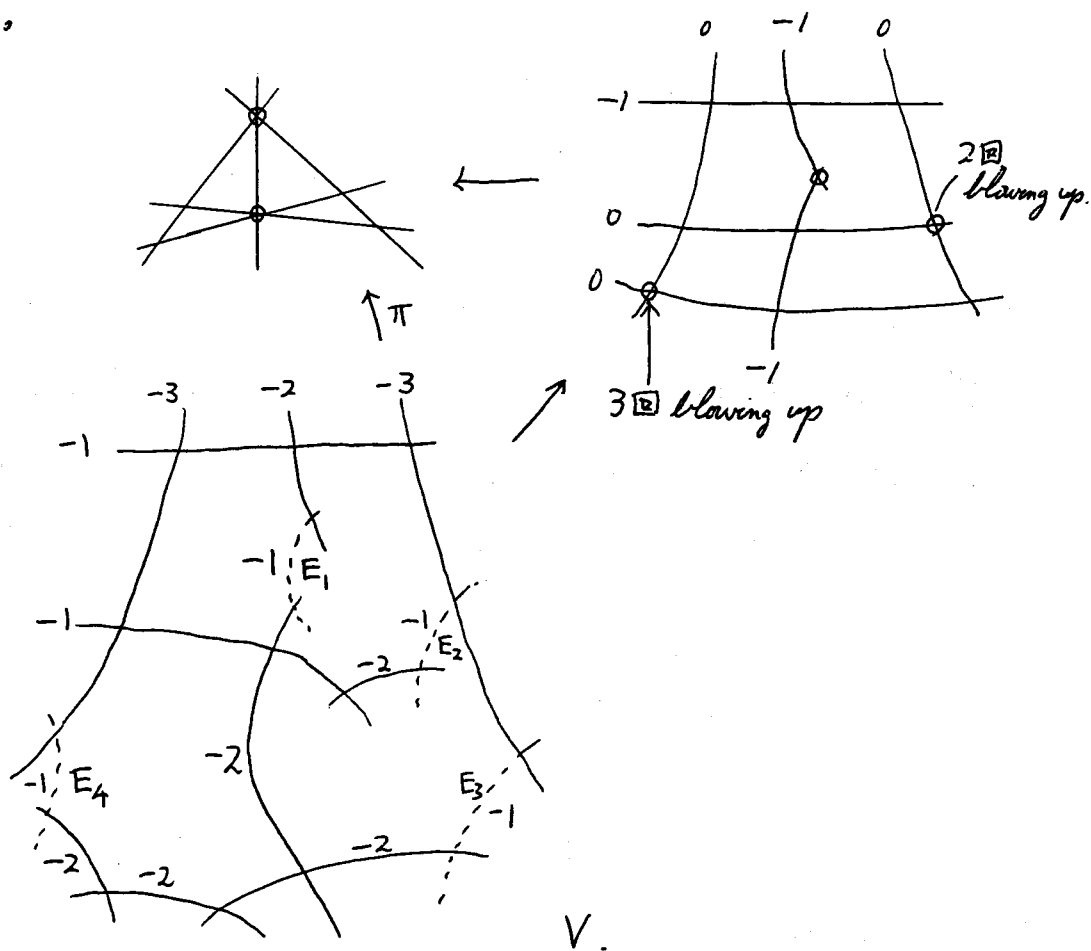


### Tom Dieck - Petrie の例

★の方法によって, ホモロジー平面を構成しようとする時  
 定理 2 からわかるように,  $\mathbb{P}^2$  上の有理曲線,  $H_i$  の選び方には  
 かなり制限があると思われるが,  $H_i$  の本数をふやした  
 時の状況については, わからない. 例えば, Tom Dieck  
 と Petrie は, 次の様な例で, ホモロジー平面を与える  
 直線の配置で, 直線の数には, 制限がないことを示した.



また 次の直線の配置は、やはり Ramanujan の例を与え  
る。



$$D := \text{Supp}(\pi^{-1}(\text{lines})) - (E_1 \cup E_2 \cup E_3 \cup E_4)$$

$$X = V - D$$

とすると、 $X$ が Ramanujan の例に同型になる。

### §3. 群の作用との関係

Tom Dieck と Petrie が ホモロジー 平面の研究を始めたのは、次の予想との関連による。

予想 A.  $\mathbb{C}^*$  の  $\mathbb{C}^3$  への代数的な作用は linearizable である。

この予想については、いくつかの研究があって、部分的には解決されており、次のケースだけが知られていない。

(a).  $\mathbb{C}^*$  は  $\mathbb{C}^3$  内に、一点だけ固定点  $P$  を持ち、 $\mathbb{C}^*$  の  $T_P \mathbb{C}^3$  への作用を、一次元の表現の直和として  $z^a + z^b + z^c$  と書いたとき、 $a > 1$ ,  $b, c < 0$  かつ、 $a, b, c$  は互いに素。

次の予想は、Petrie による。

予想 B.  $\mathbb{C}^2$  以外の ホモロジー平面は、有限個数の自明でない、自己同型を持たない。

Kraft により、(a) の場合、予想 B から予想 A が導びかれることが示されている。

予想 B については, Petrie は,  $\overline{K}=1$  のホモロジー平面,  
 $\overline{K}=2$  の Ramanujam, Gurjar-Miyanishi の例について  
 この予想が成り立つことを示した。定理 3 の我々の  
 例についても,  $m$  が 2 以上なら, Petrie の方法によって,  
 相対グラフの形から, 予想 B が正しいことは, すぐにわかる。  
 $m=1$  の場合でも,  $n=4, 5, \dots$  と相対グラフの形を,  
 具体的に決めれば, B が成り立つことはわかる。しかし,  
 このケースも含めて, 一般に, 予想 B が成り立つかどうかは  
 わかっていない。

#### References

- [1] T. Fujita, On the topology of non-complete algebraic surfaces,  
 J. Fac. Sci. Univ. of Tokyo, 29(1982), 503-566.
- [2] R.V. Gurjar and M. Miyanishi, Affine surfaces with  $\overline{K} \leq 1$   
 Algebraic geometry and commutative algebra in honor of Masayoshi  
 Nagata(1987), 99-124
- [3] R.V. Gurjar and A.R. Shastri, On the rationality of complex homology  
 2-cells: I and II. Preprints.
- [4] T. Matsuoka and F. Sakai, The degree of rational cuspidal curves,  
 preprint.
- [5] M. Miyanishi and T. Sugie, Examples of homology planes of general  
 type, preprint.
- [6] T. Petrie, Algebraic automorphism of smooth affine surfaces, preprint.
- [7] C.P. Ramanujam, A topological characterization of the affine plane as  
 an algebraic variety, Ann. Math. 94(1971), 69-88.
- [8] T. Sugie, On T. Petrie's problem concerning homology planes, preprint.